

TP : statistiques de groupes de classes

Aurel Page

La question générale qu'on souhaite explorer est la suivante. Soit Ab l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes abéliens finis. Soit $f: \text{Ab} \rightarrow \mathbb{R}$ une application, et soit \mathcal{F} une famille de corps de nombres (par exemple les corps quadratiques). Pour tout $X > 0$, on note \mathcal{F}_X l'ensemble des éléments de \mathcal{F} dont la valeur absolue du discriminant est au plus X . On s'intéresse au comportement quand X tend vers l'infini, et en particulier sa limite si elle existe, de la quantité :

$$E_{\mathcal{F},X}(f) = \frac{\sum_{K \in \mathcal{F}_X} f(\text{Cl}(K))}{|\mathcal{F}_X|}.$$

Si la limite existe, on l'appellera la moyenne de f sur la famille \mathcal{F} , et on la notera $E_{\mathcal{F}}(f)$. Si f est la fonction indicatrice d'un sous-ensemble Y de Ab , on l'appellera la probabilité que le groupe des classes appartienne à Y dans la famille \mathcal{F} .

1. Écrire une fonction qui énumère les corps quadratiques par discriminant croissant et calcule leur groupe de classes.
2. Écrire une fonction qui calcule $E_{\mathcal{F},X}(f)$.
3. Pour quelques applications f de votre choix, est-ce que $E_{\mathcal{F},X}(f)$ semble approcher une limite ? Par exemple $f =$ la fonction indicatrice du groupe trivial, ou bien $f(A) =$ le p -rang de A pour un p premier fixé.
4. Est-ce que cette limite reste identique dans des sous-familles ? Par exemple, dépend-elle de la signature des corps ? Du nombre de premiers ramifiés ? De la décomposition des petits nombres premiers ?
5. La probabilité qu'un nombre premier p divise le nombre de classes semble-t-elle être $1/p$ comme pour un nombre entier aléatoire ?
6. Que se passe-t-il si on s'intéresse à la famille des corps quadratiques définis par un polynôme $x^2 - tx + 1$ avec $t > 2$ entier, ordonnés par t croissant (au lieu du discriminant du corps) ?
7. Que se passe-t-il en degré supérieur ? Y a-t-il une influence du groupe de Galois ? Vous pouvez générer des exemples avec `nflist` ou aller voir la LMFDB : www.lmfdb.org/NumberField pour télécharger des listes de corps de nombres.