ALGÈBRE LINÉAIRE RAPIDE

BILL ALLOMBERT

1. Algorithme de Wiedemann

(1) Écrire une fonction qui prend en entrée une suite $[a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}]$ recurrente linéaire d'ordre au plus n et retourne son polynôme minimal.

(2) Vérifier votre programme sur les suites suivantes :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots \tag{1}$$

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots \tag{2}$$

$$0, 0, -1, 2, -7, 21, -65, 200, -616, 1897, \ldots \tag{3}$$

(3) Écrire une fonction qui prend en entrée une matrice A, un vecteur b et une forme linéaire f et retourne le polynôme minimal de la suite $(f(A^i b))_i$. (On utilisera le paquet "LinearAlgebra").

(4) Vérifier votre programme pour A,b et f donné par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On notera P le polynôme obtenu.

(5) Écrire une fonction qui prend en entrée un polynôme P, une matrice A, un vecteur b et retourne $P(A)b$ selon la méthode de Horner.

(6) Vérifier votre programme pour P, A et b comme précédemment.

(7) Écrire une fonction qui prend en entrée une matrice A, un vecteur b et retourne le polynôme minimal de la suite $(f(A^i b))_i$.

(8) Vérifier votre programme pour A et b comme précédemment.

(9) Écrire une fonction qui prend en entrée une matrice inversible A et un vecteur b et retourne $A^{-1}b$.

(10) Vérifier votre programme pour A et b comme précédemment.

2. Algorithme de Gauss-Bareiss

(1) Écrire une fonction qui met une matrice à coéfficients entiers sous forme triangulaire à l'aide de l'algorithme de Gauss-Bareiss.

(2) Vérifier votre programme pour $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$

(3) Écrire une fonction qui calcule le déterminant d'une matrice à coéfficients entiers.

(4) Faire la même chose pour des matrices à coefficients polynomiaux.

(5) En déduire une fonction qui calcule le polynome caractéristique d'une matrice.