

Autour des symboles modulaires

Bernadette, Perrin-Riou

avec K. Belabas, D. Bernardi

Lyon, Atelier Pari/GP 2017

10 janvier 2017

Γ sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$, essentiellement ici,

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}), \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Im}(z) > 0\}$$

$\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ muni de la géométrie hyperbolique.

Action de $GL_2(\mathbb{Q})$ par homographie

$$X_\Gamma = X_0(N) = \Gamma \backslash \mathcal{H}^*$$

$V_k = \mathbb{Q}[x, y]_{k-2}$ sur lequel $GL_2(\mathbb{Q})$ agit à droite :

$$(P|\gamma)(x, y) = P((x, y)\gamma^*) = P(dx - cy, -bx + ay) \text{ pour } P \in V_k$$

avec $\gamma^* = \det(\gamma)\gamma^{-1}$.



Système de Farey

- Polygone hyperbolique convexe orienté dont les côtés sont des géodésiques entre des points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$
- Involution $*$ sur les côtés du polygone
- Données de recollement : $\gamma_a a = -a^*$ avec $\gamma_a \in SL_2(\mathbb{Z})$ (peuvent être déduites des deux premières données)

→ un domaine fondamental pour X_Γ où Γ est le sous-groupe engendré par les γ_a modulo une petite modification pour les chemins points fixes par $*$ (dits chemins elliptiques)

Ravi S. Kulkarni, *An Arithmetic-Geometric Method in the Study of the Subgroups of the Modular Group*, *American Journal of Mathematics*, Vol. 113, No. 6. (Dec., 1991), pp. 1053-1133.

Exemple

$N = 37$, un symbole de Farey unimodulaire est le suivant

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & \infty & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{1}{2} & \frac{4}{7} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & 1 \\
 \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} \\
 a_1 & a_1^* & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_5^* & a_2^* & a_8 & a_3^* & a_9 & a_6^* &
 \end{array}$$

ou

$$a_1 \ a_1^* \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_5^* \ a_2^* \ a_8 \ a_3^* \ a_9 \ a_6^*$$

• : chemin elliptique d'ordre 3 ($\gamma a = -a^*$ avec γ d'ordre 3)

○ : chemin elliptique d'ordre 2 ($\gamma a = -a^*$ avec γ d'ordre 2)

(r_1, r_2) unimodulaire : il existe $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma\infty = r_1$ et $\gamma 0 = r_2$

On pourra utiliser la fonction `multipolygon` avec l'option 1 ou 3 (pas encore dans master ..., mais on peut l'obtenir à partir de `msinit(13,2)` de manière compliquée !)

```
? multipolygon(13,3)
%1 = [[[-1,1;-1,0],[1,0;0,1],[0,1;-1,3],
        [-1,1;-3,2],[-1,2;-2,3],[-2,1;-3,1]],
      Vecsmall([2,1,3,4,5,6]),
      [[-1,-1;0,-1],[1,-1;0,1],[3,-1;13,-4],
        [-5,2;-13,5],[-8,5;-13,8],[9,-7;13,-10]]]
? [3,-1;13,-4]^3
%5 = [1, 0;0 1]
```

$$a_1 a_1^* a_2 a_3 a_4 a_5$$



Exemples d'autres sous-groupes

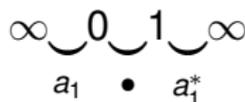
$SL_2(\mathbb{Z})$



$\Gamma_1(2)$



$\Gamma_1(3)$



Polygone normalisé

A partir d'un système de Farey comme le précédent, construire un système de Farey normalisé, autrement dit tel que \mathcal{V} est la "concaténation" de mots de type

- $a = a^*$, avec recollement elliptique ;
- aa^* , avec recollement parabolique ;
- $a_1 a_2 a_1^* a_2^*$, avec recollements hyperboliques.

En particulier, la distance d'un chemin a de \mathcal{V} à a^* est 0, 1 ou 2.

Exemple

$$\boxed{b_1 b_1^* \mid b_2 b_2^* \mid b_3 b_3^* \mid b_4 b_5 b_4^* b_5^*}$$

- Pas de points elliptiques.
- Le genre de la courbe X_Γ associée est 1.
- Il y a 4 pointes non équivalentes modulo Γ .

Exemple $N = 37$

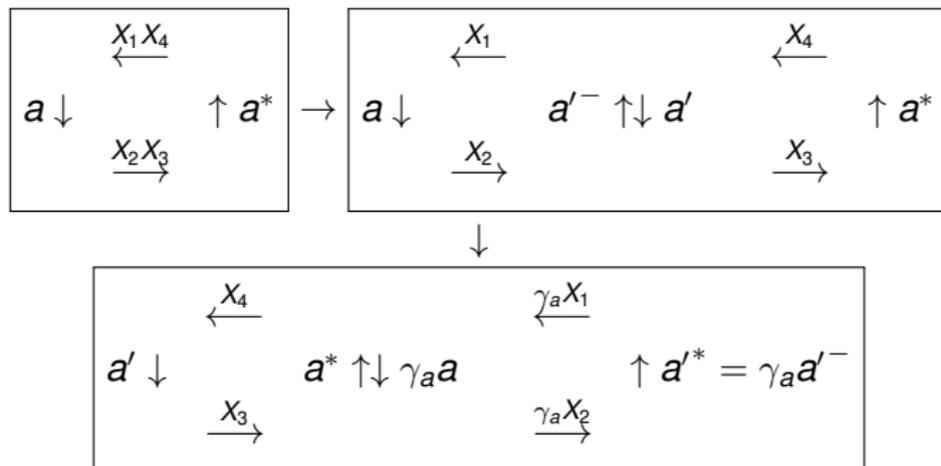
```
? [V,Ast,data]=mspolygon(37,2);
? Ast
%2 = Vecsmall([1,2,5,6,3,4,7,10,11,8,9,12,14,13])
```

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & \circ & \boxed{a_3 a_4 a_3^* a_4^*} & \bullet & \boxed{a_6 a_7 a_6^* a_7^*} & \circ & \boxed{a_9 a_9^*} \\
 a_1 & a_2 & & a_5 & & a_8 &
 \end{array}$$

- Deux chemins elliptiques d'ordre 2 et deux chemins elliptiques d'ordre 3
- Le genre de la courbe X_Γ associée est 2.
- Il y a 2 pointes non équivalentes modulo Γ .

Les chemins ne sont plus unimodulaires. La taille des rationnels augmente.

Algorithme : Opération de base (Siegel)



Nous allons représenter cette opération de la manière suivante

$$(\underline{a} \ X_2 \mid X_3 \ \underline{a}^* \ X_4 \mid \underline{X}_1) \mapsto (a' \ X_3 \ \gamma_a(X_2) \ a'^* \ \gamma_a(X_1) X_4)$$

Les opérations suivantes permettent de remplacer W supposé déjà sous forme normale par aba^*b^*W en diminuant la longueur de la partie pas encore sous forme normale.

$$\begin{aligned}
(WX \underline{a} Ub | Y \underline{a^*} Z | b^* T) &\rightarrow (a Y U b a^* b^* T W X Z) \\
(a Y U \underline{b} | a^* \underline{b^*} T | W X Z) &\rightarrow (b a^* b^* W X Z a Y U T) \\
(b \underline{a^*} b^* W | X Z \underline{a} Y U T |) &\rightarrow (a^* X Z b^* W a b Y U T) \\
(a^* X Z \underline{b^*} | W a b \underline{a} Y U T |) &\rightarrow (b^* W a b a^* X Z Y U T) \\
(b^* W \underline{a} b | \underline{a^*} X Z Y U T |) &\rightarrow (a b a^* b^* W X Z Y U T)
\end{aligned}$$

Carl L. Siegel, Topics in Complex Function Theory, vol I, Elliptic Functions and Uniformization Theory, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 25, Vol. I, 1969.

$$\Delta = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]$$

$\Delta_0 = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_0$ diviseurs de degré 0 engendré par les $(r, s) = [s] - [r]$ (géodésique entre r et s dans \mathcal{H}^*).

Définition

Espace des symboles modulaires : $Symb_{\Gamma}(V) = \text{Hom}_{\Gamma}(\Delta_0, V)$ muni d'une action de $GL_2(\mathbb{Q})$ par $(\Phi|_{\gamma})(\delta) := \Phi(\gamma \cdot \delta)|_{\gamma}$

Suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(\Delta, V) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma}(\Delta_0, V) \rightarrow H_{par}^1(\Gamma, V) \rightarrow 0$$

$$\Phi \mapsto (\gamma \rightarrow \Phi((P, \gamma P)) \text{ mod } \textit{cobord})$$

$H_{par}^1(\Gamma, V)$ cohomologie parabolique d'Eichler-Shimura.

$$0 \rightarrow H_{par}^1(\Gamma, V) \rightarrow H^1(\Gamma, V) \rightarrow \prod_{s \in \Gamma \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})} H^1(\text{Stab}_{\Gamma}(s), V)$$

Lien avec les formes modulaires paraboliques de poids k : on pose

$$\omega_f = f(\tau)(\tau x + y)^{k-2} d\tau$$

$$S_k(\Gamma) \xrightarrow{\cong} H_{par}^1(\Gamma, V_k(\mathbb{R}))$$

$$f \mapsto \textit{classe}(\gamma \mapsto \int_P^{\gamma P} \text{Re}(\omega_f))$$

Description de Δ_0 en tant que Γ -module

Théorème

Soit \mathcal{F} un système de Farey $\mathcal{V} = ((a_1, \dots, a_n), *)$ + données de recollement $(\gamma_i)_{i=1, \dots, n}$. Alors, Δ_0 en tant que Γ -module peut être décrit par générateurs et relations

- *générateurs* : les a_i
- *relations* :
 - $\gamma_i a_i = -a_i^*$
 - $(1 + \dots + \gamma_i^{\mu_i - 1}) a_i = 0$ si $a_i^* = a_i$ et μ_i l'ordre de γ_i
 - $\sum_i a_i = 0$

Permet une description explicite de $\text{Symb}_\Gamma(V)$.

Exemple : $N = 15$

```
? M=msinit(15,2);
? [G,R]=mspathgens(M);
? G
%3 = [[+oo, 0], [0, 1/5], [1/5, 1/4], [1/4, 1/3], [1/3, 2/5]]
? #R
%4 = 1
? R[1]
%5 = [[ [1, 1; [1, 1; 0, 1], -1], 1], [ [1, 1; [7, -1; 15, -2], -1], 2],
      [ [1, 1; [17, -4; 30, -7], -1], 3], [ [1, 1; [11, -3; 15, -4], -1], 4],
      [ [1, 1; [19, -7; 30, -11], -1], 5]]
```

Exemple : $N = 37$

```
? M=msinit(37,2); [G,R]=mspathgens(M);
? G
%2 = [[+oo,0],[0,1/5],[1/5,1/4],[1/3,3/8],[3/8,2/5],
      [2/5,3/7],[4/7,3/5],[1/4,1/3],[2/3,3/4]]
? R[1] \\ relation "unique"
%3 = [[[1,1;[1,1;0,1],-1],1],[[1,1;[21,-4;37,-7],-1],1]]
? R[2] \\ elements elliptiques d'ordre 2
%4 = [[[1,1;[31,-13;74,-31],1],6]]
? R[3] \\ elements elliptiques d'ordre 2
%5 = [[[1,1;[43,-25;74,-43],1],7]]
? R[4] \\ elements elliptiques d'ordre 3
%6 = [[[1,1;[10,-3;37,-11],1;[-11,3;-37,10],1],8]]
? R[5] \\ elements elliptiques d'ordre 3
%7 = [[[1,1;[26,-19;37,-27],1;[-27,19;-37,26],1],9]]
```

Théorie d'Eichler-Shimura

- un \mathbb{C} -espace vectoriel $H_{par}^1(\Gamma, V_k(\mathbb{R})) \cong S_k(\Gamma)$ de dimension d , la structure de \mathbb{C} -espace vectoriel sur $H_{par}^1(\Gamma, V_k(\mathbb{R}))$ étant induite par celle de $S_k(\Gamma) : f \mapsto (\delta \mapsto \int_{\delta} Re(\omega_f)) \in \text{Hom}_{\Gamma}(\Delta_0, V_k(\mathbb{R}))$
- un \mathbb{Z} -module $H_{par}^1(\Gamma, V_k(\mathbb{Z}))$ de rang $2d$;
- donc un tore complexe $\mathbb{T}_k(\Gamma) = H_{par}^1(\Gamma, V_k(\mathbb{R})) / H_{par}^1(\Gamma, V_k(\mathbb{Z}))$;
- une forme bilinéaire hermitienne H définie positive sur $H_{par}^1(\Gamma, V_k(\mathbb{R}))$ (produit de Petersson) tel que $A(u, v) = \text{Im}(H(u, v))$ soit une forme bilinéaire alternée non dégénérée à valeurs dans \mathbb{Q} sur $\text{Hom}_{\Gamma}(\Delta_0, V_k)$.

Dans le cas où $k = 2$, choix naturel d'un réseau L_k de $\text{Hom}_{\Gamma}(\Delta_0, V_k)$; A est à valeurs dans \mathbb{Z} sur L_k . Lié à la dualité parfaite produit d'intersection $H^1(X, \mathbb{Z}) \times H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

Petersson

$\mathcal{F} = (\mathcal{V} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), *, (\gamma_j)_{j=1, \dots, n}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{V_k}$ forme bilinéaire vérifiant

$$\langle P|_k \gamma, Q|_k \gamma \rangle_{V_k} = \langle P, Q \rangle_{V_k} \quad \langle (\tau x + y)^{k-2}, (\tau' x + y)^{k-2} \rangle_{V_k} = (\tau - \tau')^{k-2}$$

Définition

On définit pour Φ_1 et $\Phi_2 \in \text{Hom}_\Gamma(\Delta_0, V_k(\mathbb{R}))$

$$\begin{aligned} \{\Phi_1, \Phi_2\} = & \sum_{j \in (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / * } \langle \Phi_1((Z, \gamma_j^{-1} Z)), \Phi_2(\mathbf{a}_j) \rangle_{V_k} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{V}_{ell,2}} \langle \Phi_1((Z, \gamma_j^{-1} Z)), \Phi_2(\mathbf{a}_j) \rangle_{V_k} \\ & + \frac{1}{3} \sum_{j \in \mathcal{V}_{ell,3}} \langle \Phi_1((Z, \gamma_j^{-1} Z) + (Z, \gamma_j^{-2} Z)), \Phi_2(\mathbf{a}_j) \rangle_{V_k} \end{aligned}$$

Proposition

La forme bilinéaire $\{\cdot, \cdot\}$ sur $\text{Hom}_\Gamma(\Delta_0, V_k(\mathbb{R}))$ est indépendante du choix du polygone fondamental, compatible aux opérateurs de Hecke. Son radical à droite et à gauche est $\text{Hom}_\Gamma(\Delta, V_k(\mathbb{R}))$. Si f et g sont les images respectives de F et G dans $S_k(\Gamma)$,

$$\{F, G\} = -2(2i)^{k-2} \text{Im}(\langle f, g \rangle_{\text{Petersson}})$$

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

Goro Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes,
Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 11, No. 4, October, 1959

Nouvelle fonction GP/Pari :

```
? M=msinit(37,2);  
? C=mscuspidal(M);  
? mspetersson(M,C[1])  
%62 =  
[ 0 -17 -8 -17]  
  
[17  0 -8 -25]  
  
[ 8  8  0 -17]  
  
[17  25 17  0]
```

Ici, la base choisie de l'espace des formes paraboliques est une base d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel. Ne définit pas un réseau canonique.

```
? [M,e1]=msfromell(ellinit("37b1")); [M,e2]=msfromell
? mspetersson(M,Mat(e1))/2
%2 = [0 -1]
      [1  0]
? mspetersson(M,Mat(e2))/2
%3 = [0 -3]
      [3  0]
? mspetersson(M,Mat(e3))/2
%4 = [ 0 -1/3]
      [1/3  0]
```

On a $37b_3 \xrightarrow{3} 37b_1 \xrightarrow{3} 37b_2$. Bonne normalisation du symbole modulaire associée à une courbe elliptique.

Fonction `mslattice` en poids 2. Travail en cours dans le cas de poids k .

```
? M=msinit(37,2,0);  
? mspetersson(M,msslattice(M,mspolygon(M)))  
%3 =  
[0 -1 0 0]  
[1 0 0 0]  
[0 0 0 -1]  
[0 0 1 0]
```

Module d'Eisenstein

On peut définir un prolongement à $H^1(\Gamma, V_k(\mathbb{R}))$ ("séries d'Eisenstein") :

$$V : \text{Fonc}_{\Gamma_0(N)}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2, \mathbb{Q} \rightarrow H^1(\Gamma, V_k(\mathbb{R}))$$

On peut calculer $\{V(f), \Phi\}$ pour $\Phi \in \text{Hom}_{\Gamma}(\Delta, V_k)$,

On retrouve des résultats comme ceux de V. Pasol et A. Poppa.

On devrait pouvoir définir un sous-espace de $\text{Hom}_{\Gamma}(\Delta_0, V_k(\mathbb{R}))$ isomorphe à $S_k(\Gamma)$ comme l'orthogonal de l'image de V ... Pour l'instant, les calculs dans Pari/GP ne sont pas cohérents avec mes calculs théoriques ! A suivre ...

Glenn Stevens, *Théorie des nombres* (Quebec, PQ, 1987), 887-927, de Gruyter, Berlin, 1989